

УДК 532.529

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**Гильманов С. А.,****научный руководитель д-р физ.-мат. наук, акад. АН РБ Шагапов В. Ш.****Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета**

Изучение движения жидкого потока по рельефной поверхности является актуальной задачей прикладной математики в области гидромеханики. Феноменологические модели, которые используют усредненные параметры, достаточно корректно описывают поведение потока. В работе получен лагранжев профиль начального состояния потока, рассмотрено поведение системы в зависимости от параметров.

Анализ движения потоков по поверхности, описываемой обобщенной формулой вида $y(x) = ax^2$ позволяет получить решения для произвольного гладкого профиля, составляя этот профиль из элементов парабол без нарушения ее гладкости.

Математическая модель для описания движения потока в односкоростном приближении принята аналогично теории мелкой воды. Тогда система уравнений неразрывности и баланса локального импульса при отсутствии источников и стоков может быть записана в следующем виде [1,2]:

$$\frac{d}{dt}(h-y) + (h-y)\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\frac{\partial h}{\partial x} - f(v). \quad (2)$$

Схема потока представлена на рис.1.

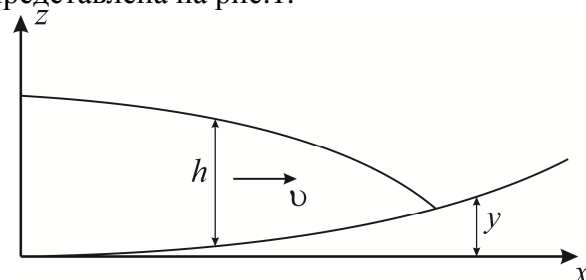


Рис.1. Схема потока

Здесь h, v – высота и средняя по высоте горизонтальная скорость потока жидкости в момент времени t для координаты x , $g=9.8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Для второго слагаемого в правой части (2) примем линейную зависимость от скорости для сил сопротивления в виде $f(v) = \alpha v$. Параметр α , принимаемый в модели, может быть определен при помощи эмпирических наблюдений. Решение системы (1)-(2) ищем в лагранжевых координатах в следующем виде [3]:

$$x = X(t)x_0, h = y + \frac{h_0(x_0)}{X(t)}, v = \dot{X}(t)x_0 \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1)-(2) дает тождественное равенство в (1), а второе уравнение принимает следующий вид:

$$\ddot{X}(t)x_0 = -g\left(2aX(t)x_0 + \frac{1}{X(t)^2}\frac{dh_0(x_0)}{dx_0}\right) - \alpha\dot{X}(t)x_0 \quad (4)$$

После преобразования это уравнение принимает вид:

$$(\ddot{X}(t) + \alpha \dot{X}(t) + 2agX(t))X(t)^2 = \frac{-g}{x_0} \frac{dh_0(x_0)}{dx_0} = gN, \quad (5)$$

здесь N – параметр системы, не зависящий от x_0 и t . Профиль жидкости в начальный момент имеет вид:

$$h_0(x_0) = C - \frac{N}{2} x_0^2 \quad (6)$$

В зависимости от параметра N профиль разлива может быть представлен или как в случае инерционного течения (край выше начала ($N < 0$)), либо как в случае стационарного течения. (в начале координат высота потока выше, чем на переднем фронте ($N > 0$)). Временное уравнение дает аналитическое решение только при $N = 0$, когда в начальный момент времени толщина жидкости одинакова для всех x_0 :

$$X(t) = C_1 \exp\left(\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4ag}\right)t\right) + C_2 \exp\left(\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4ag}\right)t\right) \quad (7)$$

Очевидно, что это уравнение затухающих колебаний, широко известное и литературе. Далее рассмотрим случай $N > 0$. Уточним начальное условие. В начальный момент времени $x = x_0$, тогда $X(0) = 1$. Второе условие примем как $\dot{X}(0) = 0$, т.е. жидкость в начальный момент покоится. Тогда зависимость $X(t)$ для параметров $\alpha = 1.0, a = 0.01$ может быть решена численно.

На Рис.2. представлены зависимости $X(t)$ от времени, числа на кривых отвечают значениям параметра N .

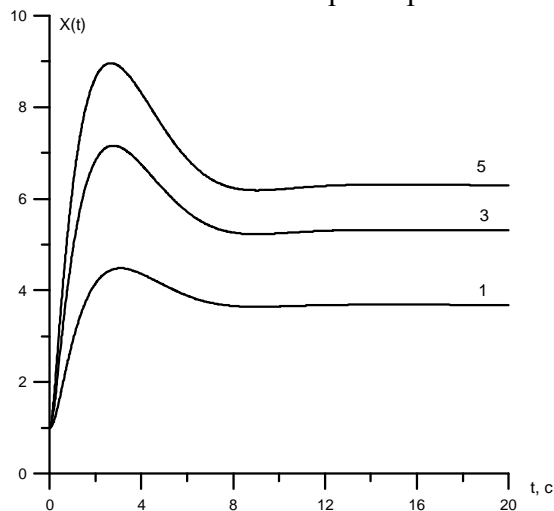


Рис.2. Зависимости X от времени для различных значений N , $\alpha = 1.0, a = 0.01$.

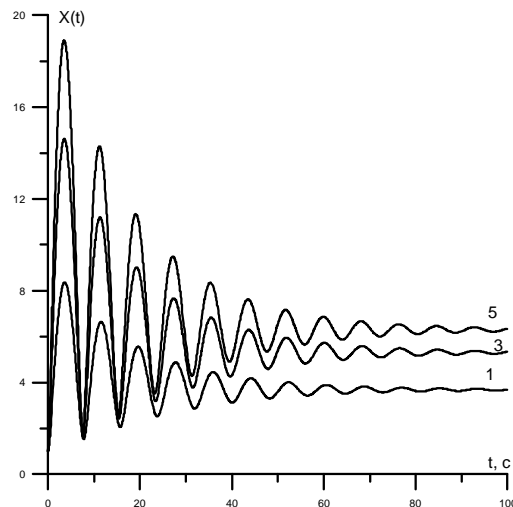


Рис.3. Зависимости X от времени для различных значений N , $\alpha = 0.1, a = 0.01$

Анализ кривых показывает, что колебания достаточно быстро затихают. Причем установившиеся значения X увеличиваются с ростом параметра N . Эйлера координаты для фиксированных значений лагранжевых координат будут иметь вид, аналогичный указанным на Рис.2. Уменьшение параметра α на порядок приведет к увеличению числа колебаний перед установлением состояния равновесия. На Рис.3. приведены зависимости X от времени для этого случая. Уменьшение параметра, отвечающего за затухание на порядок приводит к росту времени, необходимого для установления стационарной конфигурации потока. Из графиков также заметно, что увеличение параметра N влияет только на амплитуду колебаний, а частота остается постоянной. При устремлении α к 0 уравнение асимптотически стремится к решению:

$$X(t) = \frac{N}{a} - \frac{N-a}{a} \cos(\sqrt{agt}) \quad (8)$$

Анализ последнего выражения показывает, что при отсутствии сопротивления волна будет совершать колебания относительно равновесной координаты N/a с амплитудой $(N-a)/a$.

Заключение. В работе представлена математическая модель растекания жидкости по параболической поверхности. Получен аналитический профиль высоты в начальный момент времени. Получены некоторые точные и численные решения, позволяющие проанализировать поведение накатывающегося потока. Показано, что в случае отсутствия сопротивления волны будут колебаться около положения равновесия.

Список использованной литературы.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Издание 5-е. – Т. VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2006. – 736 с.
2. Шагапов В.Ш, Гильманов С.А. Растекание жидкости по поверхности, сопровождаемое впитыванием в грунт // ПМТФ.2010. Т.51.№5. С.88-94.
3. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009. 518с.